

CALCULS INTEGRALES

Exercices d'applications et de réflexions avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)

CALCULS INTEGRALES: Exercices avec solutions

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x dx$ 2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

Solution : 1) la fonction $x \mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$

Donc : $I = \int_2^4 3x dx = \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_2^4 = \frac{3}{2} \times 4^2 - \frac{3}{2} \times 2^2 = 18$

2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx = \left[x^2 + 3x \right]_0^1 = (1+3) - (0) = 4$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13) $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1)e^{(x-1)^2} dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

Solution : 1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx = \left[2 \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = [x^2 - x]_0^2$

$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$

$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{4}x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5}x^5 - 1x^4 + 2x \right]_{-1}^1$

$I_2 = \left[\frac{1}{5}x^5 - 1x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5}1^5 - 1^4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$

$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} (2t)' e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 0}$

$I_4 = \frac{1}{2} e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2} (-t^2)' e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5 = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2} e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} = -\frac{1}{2} e^{-(\ln 2)} + \frac{1}{2}$

$$I_5 = -\frac{1}{2}e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x dx$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{2+1} \ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3}$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[\ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$$

$$I_7 = \ln |e^{\ln 2} + 1| - \ln |e^0 + 1| = \ln |3| - \ln |2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\ln |e^x - e^{-x}| \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8 = \ln |e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}| - \ln |e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| = \ln \left| 3 - \frac{1}{e^{\ln 3}} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right|$$

$$I_8 = \ln \left| 3 - \frac{1}{3} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \ln \left(\frac{8}{3} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln \left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1} (\ln x)^{1+1} \right]_1^e$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$$

$$I_{10} = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2(\sqrt{14} - \sqrt{6})$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1$$

$$I_{11} = 2 \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \left((\sqrt{3})^3 - 1 \right) = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 1)$$

$$12) I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4} \sin x^{3+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx = 3 \int_1^2 (3x-4)^{-5} dx = \int_1^2 (3x-4)' (3x-4)^{-5} dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1} (3x-4)^{-5+1} \right]_1^2 = \left[\frac{1}{-4} (3x-4)^{-4} \right]_1^2 = \frac{1}{-4} (2)^{-4} - \frac{1}{-4} (-1)^{-4}$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

$$14) I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx = \left[2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_{14} = \left(2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin \pi \right) - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$15) I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

(on a : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi + 2}{8}$$

$$16) I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{(2x+1)'}{2x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln |2x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln |3| + 1 - \frac{1}{2} \ln |1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$17) I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^3 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^3 x dx$$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1} \ln^{3+1} x \right]_1^e = \frac{1}{4} \ln^4 e - \frac{1}{4} \ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((x-1)^2 \right)' e^{(x-1)^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{(x-1)^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} (1 - e)$$

$$19) I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)} dx$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)} dx = [\ln|1+\ln x|]_1^2$$

$$I_{19} = \ln|1+\ln 2| - \ln|1+\ln 1| = \ln|1+\ln 2| = \ln(1+\ln 2)$$

$$20) I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1 dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 + (\tan x)^2) - 1 \right) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$21) I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{9} x^9 - 4x + 2 \ln x \right]_1^e = \frac{8}{9} e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

Exercice3: Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^3 |x-1| dx \quad 2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

Solution : 1) on a $x \in [0, 3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

$$2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

$$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

$$a) \text{ si } x \in [-2; -1] \text{ alors : } x(x+1) \geq 0$$

$$\text{donc : } |x(x+1)| = x(x+1)$$

$$b) \text{ si } x \in [-1; 0] \text{ alors : } x(x+1) \leq 0$$

$$|x(x+1)| = -x(x+1)$$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)| dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)| dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2+x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2-x) dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = 1$$

Exercice4: on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Solution :

$$1) I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \begin{cases} I+J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ par sommation on trouve:}$$

$$2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ donc : } I = \frac{\pi+2}{8} \text{ et on remplace dans}$$

$$\text{dans la 1ère équation et on trouve: } \frac{\pi+2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc: } J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi-2}{8}$$

Exercice5 :

$$\text{on pose : } I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \text{ et } J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

1) Calculer $I+J$ et $I-3J$

2) en déduire I et J

Solution :1)

$$I+J = \int_0^{ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4} dx + \int_0^{ln16} \frac{1}{e^x+4} dx = \int_0^{ln16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} + \frac{1}{e^x+4} \right) dx$$

$$I+J = \int_0^{ln16} \left(\frac{e^x+4}{e^x+4} \right) dx = [x]_0^{ln16} = ln16 - 0 = 4ln2$$

$$I-3J = \int_0^{ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4} dx - 3 \int_0^{ln16} \frac{1}{e^x+4} dx = \int_0^{ln16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} - \frac{3}{e^x+4} \right) dx$$

$$I-3J = \int_0^{ln16} \frac{e^x}{e^x+4} dx = \int_0^{ln16} \frac{(e^x+4)'}{e^x+4} dx = [\ln|e^x+4|]_0^{ln16}$$

$$I-3J = \ln|e^{ln16}+4| - \ln|e^0+4| = \ln|20| - \ln|5| = \ln20 - \ln5$$

$$I-3J = \ln \frac{20}{5} = \ln4 = 2ln2$$

2) $\begin{cases} I+J = 4ln2 \\ I-3J = 2ln2 \end{cases}$ par soustraction on trouve:

$$4J = 2ln2 \text{ donc: } J = \frac{ln2}{2}$$

Et on remplace dans dans la 1ère équation et on trouve :

$$\frac{ln2}{2} + I = 4ln2 \text{ donc: } I = 4ln2 - \frac{ln2}{2} = \frac{7ln2}{2}$$

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{ln3} |2-e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2-x-2| dx$

Solution : 1) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx = \int_0^2 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-(x-2)}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{-(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_2^3$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{6} - \frac{2}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

2) $I = \int_0^{ln3} |2-e^x| dx$

$$2-e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln2$$

$$I = \int_0^{\ln2} |2-e^x| dx + \int_{\ln2}^{\ln3} |2-e^x| dx$$

$$I = \int_0^{\ln2} (2-e^x) dx + \int_{\ln2}^{\ln3} e^x - 2 dx$$

$$I = \frac{1}{2} [2x - e^x]_0^{\ln2} + [e^x - 2x]_{\ln2}^{\ln3}$$

$$I = ((2ln2 - 2) + 1) + ((3 - 2ln3) - (2 - 2ln2)) = \ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Exercice7: on pose :

$$A = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt \text{ et } B = \int_1^e \left(1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt$$

Calculer $A+B$

Solution :

$$A+B = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t + 1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t + 1 - \ln(t) \right) dt$$

$$A+B = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + 1 \right) dt = [\ln|t| + t]_1^e = \ln e + e - \ln|1| - 1 = e$$

Exercice8: on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Solution :

1) $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \times 1 dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I + J = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\sin \pi - \sin 0]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \times \cos 2x dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx \text{ on a : } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad a = 2x$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\pi \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \begin{cases} I + J = 0 \\ I - J = \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ par sommation on trouve: } 2I = \frac{\pi}{4}$$

Donc : $I = \frac{\pi}{8}$ et on remplace dans dans la 1ère

équation et on trouve : $\frac{\pi}{8} + J = 0 \Leftrightarrow J = -\frac{\pi}{8}$

Exercice9 : on pose : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

1) Calculer $K + L$ et $K - L$

2) en déduire K et L

$$\text{Solution : 1) } K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$K + L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K - L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$K - L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$K - L = \left[\ln |\cos x + \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$2) \begin{cases} K + L = \frac{\pi}{4} \\ K - L = \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} \text{ par sommation et soustraction}$$

on trouve: $2K = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ et $2L = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

Donc : $K = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$ et $L = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$

Exercice10 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

Solution : 1)

$$\frac{t^2}{1+t} = \frac{(t^2 - 1) + 1}{1+t} = \frac{t^2 - 1}{1+t} + \frac{1}{1+t} = \frac{(t-1)(t+1)}{1+t} + \frac{1}{1+t}$$

$$\text{Donc : } \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$2) I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{(1+t)'}{1+t} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln |1+t| \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} - 1 + \ln |2| = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

Exercice11 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

Solution : 1)

$$\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{18(x-1) - 2(x+1)}{4(x+1)(x-1)} = \frac{18x - 18 - 2x - 2}{4(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{16x - 20}{4(x+1)(x-1)} = \frac{4x - 5}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$$

$$2) I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx = \int_3^5 \left(\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx$$

$$= \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{1}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{1}{x-1} dx = \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x-1)'}{x-1} dx$$

$$= \frac{9}{2} [\ln|x+1|]_3^5 - \frac{1}{2} [\ln|x-1|]_3^5 = \frac{9}{2} (\ln 6 - \ln 4) - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2)$$

$$I = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{9}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{19}{2} \ln 2$$

Exercice12 :

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

Solution :

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx = \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = [x]_0^1 - 2 [\ln|x+1|]_0^1$$

$$I = 1 - 2 \ln 2$$

Exercice13 :

1) déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$

2) en déduire l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Exercice14 :

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$

Solution :

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\text{donc : } I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{4} [\ln|x-2|]_0^1 - \frac{1}{4} [\ln|x+2|]_0^1$$

$$I = -\frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} (\ln 3 - \ln 2) = -\frac{1}{4} \ln 3$$

Exercice15 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1) montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2) en déduire l'intégrale I

Solution : 1) on a : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{16} \left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 \cdot (e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2 \cdot (e^{-ix})^2 + 4(e^{ix}) \cdot (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right)$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{i3x} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} + 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6)$$

$$= \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

Or on sait que :

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \quad \text{t} \quad 2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$$

$$\text{Donc : } \cos^4 \theta = \frac{1}{16} ((2 \cos 4x) + 4(2 \cos 2x) + 6)$$

$$\text{Donc : } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + 4 \frac{1}{2} \sin 2x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi + 4 \frac{1}{2} \sin \pi + 3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

Exercice16 :

1) $\int_1^e \ln x dx \geq 0$ 2) $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$

Solution : 1) on a \ln positive et continue sur le segment $[1; e]$ et $1 \leq e$ donc : $\int_1^e \ln x dx \geq 0$

2) Montrons que : $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$

Soit $t \in [0; 1]$ donc $-1 \leq -t^2 \leq 0$ et puisque :

$x \mapsto e^x$ est croissante sur \mathbb{R} alors : $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$

Et puisque : $t \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0;1]$ et

$$0 < 1 \text{ Alors : } \int_0^1 e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

$$\text{Exercice 17 : Montrer que : } \frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$$

Solution : on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{Donc : } \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \text{ Donc : } \frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$$

Exercice 18 : d'application Soit $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

Solution: 1) Une exponentielle étant toujours

positive : $0 \leq f(x)$ pour tout réel x et donc en

particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$

alors $x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc

$e^{-x} \geq f(x)$ par croissance de la fonction

exponentielle.

On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle $[1 ; a]$ et ainsi

$$\int_1^a 0 dx \leq \int_1^a f(x) dx \leq \int_1^a e^{-x} dx$$

$$0 \leq F(a) \leq [-e^{-x}]_1^a \text{ Donc } 0 \leq F(a) \leq -e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1}$$

Donc : $0 \leq F(a) \leq e^{-1}$ ce qui démontre l'inégalité.

Exercice 19 : soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Solution : 1) } u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \end{aligned}$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

$$\text{Et on a : } \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0 \text{ car } 0 \leq x$$

$$\text{Donc : } \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \geq 0$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc : (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n + 1} \leq 1$$

$$\text{Donc : } \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} [x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq [x]_0^1$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 20: soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

2) En déduire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{e^n} \right)$

Exercice 21: on considère la fonction numérique

définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Est : $f(c) = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} dx$
 $= \frac{1}{\ln 2} \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3 \ln 2}$

Exercice 22: Calculer les intégrales suivantes :

1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 2) $C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$

Solution : 1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^3 dx$

$$= \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

2) $C = \int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{1+\frac{1}{2}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} (2-1) = \frac{2}{3}$$

Exercice 23: Calculer l'intégrale suivante :

1) $I = \int_0^\pi x \sin x dx$ 2) $J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$

3) $K = \int_1^e \ln x dx$

Solution : 1) $I = \int_0^\pi x \sin x dx$

On pose : $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0; \pi]$

donc: $I = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x dx = [-x \cos x]_0^\pi - [-\sin x]_0^\pi = \pi$

2) $J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$

On pose : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \ln 2]$ et u' et v' sont continue sur

$[0; \ln 2]$

Donc : $J = [x e^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 1 e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2}$

$$J = 2 \ln 2 - (e^{\ln 2} - 1) = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

3) $K = \int_1^e \ln x dx$ on a $K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \times \ln x dx$

On pose : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$

Donc : $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1; e]$ et u' et v' sont continue sur $[1; e]$

Donc : $K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$

$$K = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Exercice 24 : En utilisant une intégration par partie calculer : 1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ 2)

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

3) $K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx$ 3) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

$$4) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 5) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Solution :

1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ la démarche est la même

$$I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 3 \int_1^{e^3} x^{-\frac{5}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 9 \left[\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice 25 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$J = \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx \quad K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1-\ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice 26 : On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice 27 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = 2x+1$

1) vérifier que f est continue et positif sur $[1;3]$
2) tracer C_f la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

4) calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x) dx$

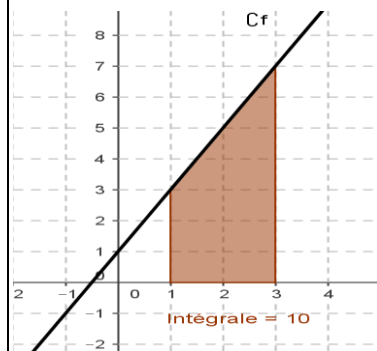
Que peut-on dire ?

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$

$$x \in [1;3] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x+1 \leq 7$$

Donc : f est continue et positif sur $[1;3]$

2)



3) Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est

$$A(\Delta_f) = 2 \times 3 + \frac{4 \times 2}{2} = 2 \times 3c^2m + \frac{4 \times 2}{2} c^2m = 10c^2m$$

$$4) I = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx = [x^2 + x]_1^3$$

$$I = (3^2 + 3) - (1^2 + 1) = 12 - 2 = 10$$

5) on remarque que : $A(\Delta_f) = \int_1^3 f(x) dx \cdot u.a$

$$\text{Avec : } u.a = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| = 1 \times 1 = 1$$

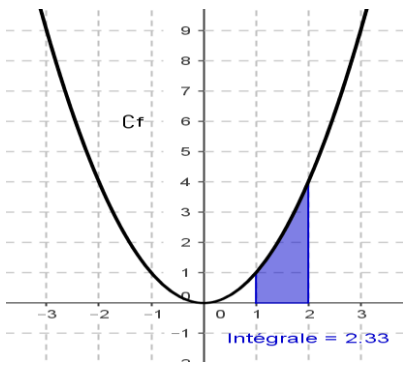
Exercice 28 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm et Soit } f \text{ défini par : } f(x) = x^2$$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution : 1)



2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{7}{3} \times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3} c^2m$$

Exercice 29: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 2x$

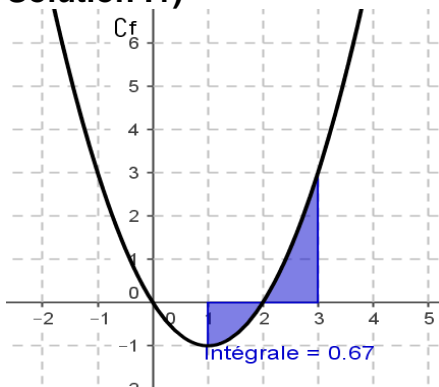
1) tracer Cf la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par :

Cf , l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = 3$

Solution : 1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur

$[1;3]$ donc : $A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx$

Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1;3]$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	$+$

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx = \int_1^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3} \times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3} \times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2 \times 2cm \times 3cm = 12c^2m$$

Exercice 30 :

$(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f défini par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx$$

On sait que : $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ donc : $e^{\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln 4}$

Donc : $2 \leq e^x \leq 4$ donc $e^x > 1$ par suite : $1 - e^x < 0$

Donc :

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1) dx$$

$$I = [e^x - x]_{\ln 2}^{\ln 4} = (e^{\ln 4} - \ln 4) - (e^{\ln 2} - \ln 2)$$

$$I = (4 - 2 \ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2 \ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

$$\text{Donc : } A = (2 - \ln 2) \times 2cm \times 2cm = 4(2 - \ln 2)c^2m$$

Exercice 31: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f défini par : $f(x) = e^x - 3$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 3$ et $x = \ln 6$

Exercice 32: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f défini par : $f(x) = \ln x - 1$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = e$

Exercice 33: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par

: (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} - e^{-x} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$$

Car : $\frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$

Donc: $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = 2 \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[2 \ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$

Donc :

$$I = 2 \ln |e^{\ln 2} + 1| - 2 \ln |e^0 + 1| = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

Donc : $A = 2 \ln \frac{3}{2} \times 2cm \times 2cm = 8 \ln \frac{3}{2} c^2 m$

Exercice34 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 8x + 12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$A(3; f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par :

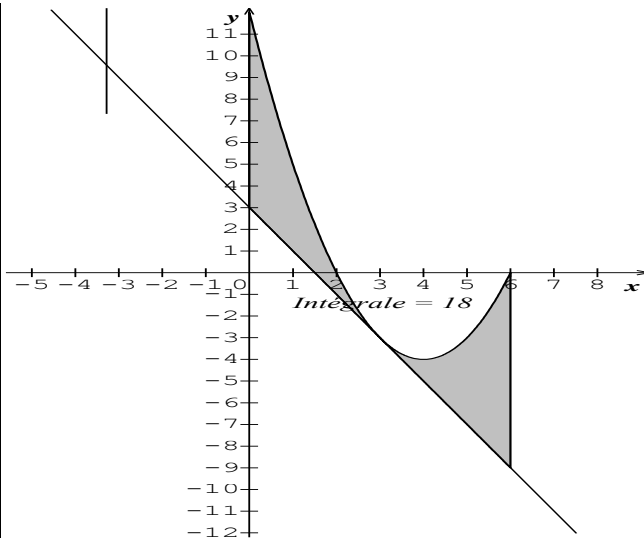
(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe

(C_f) au point $A(3; f(3))$ est : $y = f(3) + f'(3)(x-3)$

$f'(x) = 2x - 8$ et $f'(3) = -2$ et $f(3) = -3$

$(D): y = -2x + 3$



il suffit de calculer :

$$I = \int_0^6 |f(x) - y| dx = \int_0^6 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_0^6 (x+3)' (x+3) dx$$

$$I = \left[\frac{(x+3)^3}{3} \right]_0^6 = 18 \text{ donc :}$$

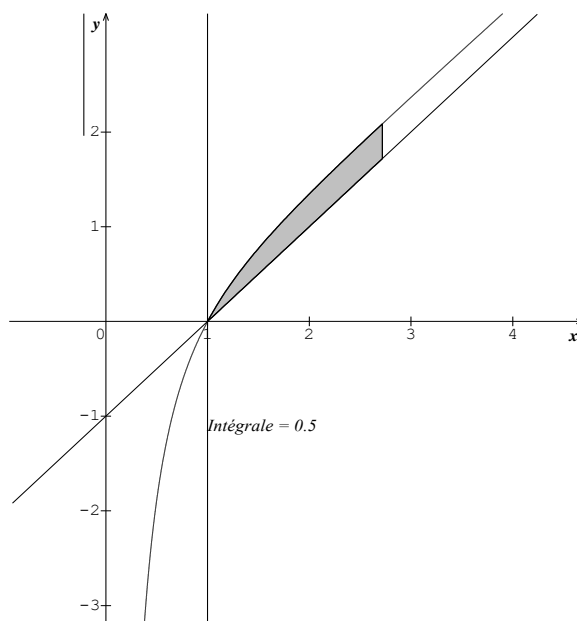
$$A = 18 \times (0.5cm)^2 = 4.5cm^2$$

Exercice35 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x = 1$ et $x = e$



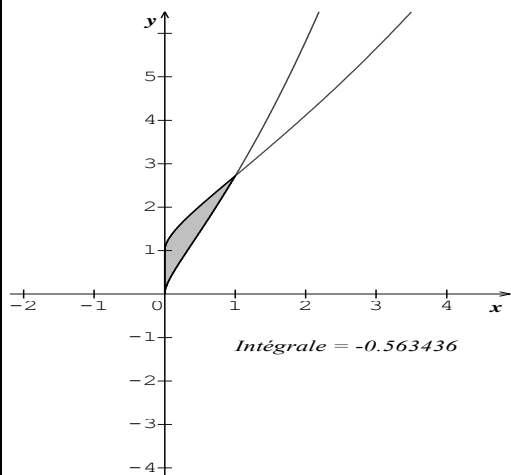
Exercice36 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et

$g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine

limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$$S = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{ Ua}$$

$$S = \int_0^1 |e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}| dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} |1 - \sqrt{x}| dx$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ donc :

$$0 \leq 1 - \sqrt{x} \text{ donc : } S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx$$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$$S = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx = \left[(6(\sqrt{x} - 1) - 2x) e^{\sqrt{x}} \right]_0^1$$

$$S = 6 - 2e \text{ Ua}$$

Exercice37 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite $(\Delta) y = x$; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice38 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \sqrt{x}$

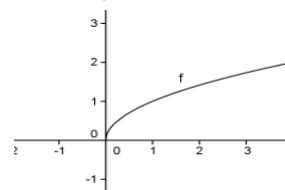
Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

$$I = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \text{ et on a :}$$

$$u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\| = 8cm^3$$



Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exercice39 : $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3} cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x(e^x - 1) dx$

$$I = \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^1 \pi (\sqrt{x(e^x - 1)})^2 dx = \pi \int_0^1 x(e^x - 1) dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

$$\text{Donc : } \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \left[x(e^x - x) \right]_0^1 - \int_0^1 1(e^x - x) dx$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc : $I = \frac{1}{2} \pi$ par suite :

$$V = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m$$

Exercice40: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices

Que l'on devient un mathématicien



CALCULS INTEGRALES

Exercices d'applications et de réflexions

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)

TD : CALCULS INTEGRALES

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x dx$ 2) $J = \int_0^1 (2x+3) dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

13) $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ 18) $I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ 20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1| dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

Exercice4 : on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Exercice5 :

on pose : $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$

1) Calculer $I+J$ et $I-3J$

2) en déduire I et J

Exercice6 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

Exercice7 : on pose :

$$A = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt \quad \text{et} \quad B = \int_1^e \left(1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt$$

Calculer $A+B$

Exercice8 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$ et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$

2) en déduire I et J

Exercice9 : on pose : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

1) Calculer $K+L$ et $K-L$

2) en déduire K et L

Exercice10 : 1) vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

Exercice11 : 1)verifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

2) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

Exercice12 :

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

Exercice13 :

1) déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

2)en déduire l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Exercice14 : Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$$

Exercice15 :on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ (linéarisation de } \cos^4 x \text{)}$$

2)en déduire l'intégrale I

Exercice16 : Montrer les inégalités suivantes

$$1) \int_1^e \ln x dx \geq 0 \quad 2) \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

Exercice17 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Exercice18 : d'application Soit $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

Exercice19 : soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1)Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 20: soit la suite numérique (u_n)

$$\text{définie par : } u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1)Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

2) En déduire: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{e^n} \right)$

Exercice 21: on considère la fonction numérique

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Exercice 22: Calculer les intégrales suivantes :

$$1) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx \quad 2) C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$$

Exercice 23 : Calculer l'intégrale suivante :

$$1) I = \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad 2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad 3) K = \int_1^e \ln x dx$$

Exercice24 : En utilisant une intégration par

$$\text{partie calculer : 1) } I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2)$$

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 3) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$4) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 5) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Exercice25 : En utilisant une intégration par

$$\text{partie calculer : } J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \quad K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Exercice26 : On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice 27: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1cm$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x) = 2x + 1$

1) vérifier que f est continue et positif sur $[1;3]$

2) tracer C_f la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

4) calculer l'intégrale : $I = \int_1^3 f(x) dx$

Que peut-on dire ?

Exercice 28: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x^2$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 29: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 2x$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Exercice30 :

$(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f défini par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Exercice 31: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f défini par : $f(x) = e^x - 3$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 3$ et $x = \ln 6$

Exercice 32: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f défini par : $f(x) = \ln x - 1$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = e$

Exercice 33: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par

(C_f) ; (C_g) et les droites $x = 0$ et $x = \ln 2$

Exercice34 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 0.5cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x^2 - 8x + 12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$A(3; f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par :

(C_f) et les droites : (D) et $x = 1$ et $x = e$

Exercice35 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 1cm$ et Soit f défini par : $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x = 1$ et $x = e$

Exercice36 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Exercice37 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

- 1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
- 2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.
- 3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite $(\Delta) y = x$; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice38 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Exercice39 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$
 et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Exercice40: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$



*C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices*

Que l'on devient un mathématicien