

PRIMITIVES - CORRECTION

Exercice n°1

1) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 9 \times 1 = 9x^2 - 9$.

2) Si on note g la fonction définie par $g(x) = 9x^2 - 9$, alors grâce à la question 1), on dispose d'une primitive de g en la somme de la fonction f . Une autre primitive de g serait la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(x) + k$, où k est une constante réelle quelconque. Ainsi $f(x) = 3x^3 - 9x + 1 + 50 = 3x^3 - 9x + 51$ est une autre primitive de g

3) Puisque $g(x) = 9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1) = 9(x-1)(x+1)$, on peut établir le signe de $g(x)$, donc le sens de variation de f : Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) > 0$ et pour $x \in]-1; 1[$, $g(x) < 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$, strictement décroissante sur $]-1; 1[$, et strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Exercice n°2

1) La fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction affine, donc il existe une primitive

définie sur \mathbb{R} par
$$F(x) = 2 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = x^2 + x$$

2) La fonction f définie par $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$ est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme, donc il existe une

primitive définie sur \mathbb{R} par
$$F(x) = 10 \times \frac{x^5}{5} + 6 \times \frac{x^4}{4} - 1 \times x = 2x^5 + \frac{3x^4}{2} - x$$

3) La fonction f définie par $f(x) = (x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$ est continue sur \mathbb{R} en tant que

fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur \mathbb{R} par
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 3 \times x = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

4) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il

existe une primitive définie sur $]0; +\infty[$ par
$$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}$$

5) La fonction f définie par $f(x) = \frac{-4}{3x^5} = -\frac{4}{3}x^{-5}$ est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont,

donc il existe une primitive définie sur $]0; +\infty[$ par
$$F(x) = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{4}{3} \times \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{x^{-4}}{3} = \frac{1}{3x^4}$$

6) La fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il

existe une primitive définie sur $]0; +\infty[$ par
$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$$

7) La fonction f définie par $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ est continue sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il

existe une primitive définie sur \mathbb{R} par
$$F(x) = -\cos x - 2 \sin x$$

Exercice n°3

f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$ définies par

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + k, k \in \mathbb{R}.$$

On cherche k pour que $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 1 - \frac{2}{1} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

La primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x=1$ est donc
$$F(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}$$

Exercice n°4

1) f est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme donc admet des primitives définies sur \mathbb{R} par $F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + k, k \in \mathbb{R}$. On cherche k pour que $F(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + k = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{12} + k = 0$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{7}{12}. \text{ La primitive } F \text{ de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ qui vérifie } F(1)=0 \text{ est donc } F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{7}{12}$$

2) f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives définies sur $]0; +\infty[$

par $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$. On cherche k pour que $F(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - 2\sqrt{1} + k = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + k = 0$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{2}. \text{ La primitive } F \text{ de } f \text{ sur }]0; +\infty[\text{ qui vérifie } F(1)=1 \text{ est donc } F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{5}{2}$$

Exercice n°5

1) $f(x) = 3(3x+1)^4$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, et $f(x) = u'(x)(u(x))^4$

où $u(x) = 3x+1 \Rightarrow u'(x) = 3$. Ainsi une primitive sur \mathbb{R} de f est définie par $F(x) = \frac{(u(x))^5}{5} = \frac{(3x+1)^5}{5}$

2) $f(x) = 16(4x-1)^3$. f est définie sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4 \times 4(4x-1)^3$, donc de la forme $f(x) = 4u'(x)(u(x))^3$, où $u(x) = 4x-1 \Rightarrow u'(x) = 4$. Ainsi une primitive sur

\mathbb{R} de f est définie par $F(x) = \cancel{4} \times \frac{(u(x))^4}{\cancel{4}} = (4x-1)^4$

3) $f(x) = (2x+7)^6$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que puissance d'une fonction qui l'est, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x+7)^6$, donc de la forme $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)(u(x))^6$, où $u(x) = 2x+7 \Rightarrow u'(x) = 2$. Ainsi une primitive

sur \mathbb{R} de f est définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(u(x))^7}{7} = \frac{(2x+7)^7}{14}$

4) $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, et de la forme $f(x) = u'(x)(u(x))^5$, où $u(x) = 3x^2-2x+3 \Rightarrow u'(x) = 6x-2$. Ainsi une primitive sur \mathbb{R} de f est définie par

$$F(x) = \frac{(u(x))^6}{6} = \frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}$$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$. f est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ en

tant que produit et puissance de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$, donc de la

forme $f(x) = -u'(x) \times (u(x))^4$, donc $F(x) = -\frac{(u(x))^5}{5} = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$

6) $f(x) = \sin x \cos x$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x \sin x$, donc de la forme $f(x) = u'(x)u(x)$, où $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$. Ainsi une primitive sur \mathbb{R}

de f est définie par $F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2}$

Exercice n°6

1) $f(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$, f est de la forme $f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une

primitive sur $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ définie par $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{1+4x}$

2) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f(x) = \frac{3 \times 2}{(2x+1)^2}$ est de la forme $f(x) = \frac{3 \times u'(x)}{(u(x))^2}$, donc

f admet une primitive sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ définie par $F(x) = -\frac{3}{u(x)} = -\frac{3}{2x+1}$

3) $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \left]-\frac{3}{4}; +\infty\right[$, $f(x) = \frac{\frac{1}{4} \times 4}{(4x+3)^2}$ est de la forme $f(x) = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$,

donc f admet une primitive sur $\left]-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ définie par $F(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{4(4x+3)}$

4) $f(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$ f est définie et continue sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, et pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ ou $u(x) = 2-x \Rightarrow u'(x) = -1$ donc f admet une primitive

sur $]2; +\infty[$ définie par $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{2-x}$

5) $f(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur

ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$, $f(x) = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right) \times (-3)}{(4-3x)^2}$ est de la forme $f(x) = -\frac{2}{3} \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet

une primitive sur $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$ définie par $F(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{u(x)} = \frac{2}{3(4-3x)}$

6) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est de la forme

$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = x^2+x+1 \Rightarrow u'(x) = 2x+1$ donc f admet une primitive sur \mathbb{R} définie par

$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x^2+x+1}$

7) $f(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2;3\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\} =]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$, $f(x) = \frac{2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$ donc de

la forme $f(x) = \frac{2u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow u'(x) = 2x - 5$ donc f admet une primitive sur $]3; +\infty[$ (ou

n'importe lequel des trois intervalles de son ensemble de définition), définie par $F(x) = -\frac{2}{u(x)} = -\frac{2}{x^2 - 5x + 6}$

8) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\pi; (k+1)\pi[$, f étant de la forme

$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\pi; (k+1)\pi[$

définie par $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{\sin x}$

9) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le

dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$, f étant de la forme

$f(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$

définie par $F(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\cos x}$

Exercice n°7

1) Pour tout $x \neq -1$, $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3} = \frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$. Ainsi $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} = f(x)$ si et seulement

si pour tout $x \neq -1$, $ax+a+b = 3x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a+b=4 \Leftrightarrow b=1 \end{cases}$ Ainsi, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

2) f est continue sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions qui le sont, donc elle admet des primitives

F sur $] -1; +\infty[$. Puisque la fonction $x \rightarrow \frac{3}{(x+1)^2}$ est de la forme $x \rightarrow \frac{3u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$, une de

ses primitives sur $] -1; +\infty[$ est la fonction $x \rightarrow -\frac{3}{u(x)} = -\frac{3}{x+1}$. Puisque la fonction $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^3} = (x+1)^{-3}$ est de la

forme $x \rightarrow u'(x)(u(x))^{-3}$, où $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$, une de ses primitives sur $] -1; +\infty[$ est la fonction

$x \rightarrow \frac{u(x)^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2}u(x)^{-2} = -\frac{1}{2u(x)^2} = -\frac{1}{2(x+1)^2}$. On déduit donc qu'une primitive de f sur $] -1; +\infty[$ est la

fonction F définie sur $] -1; +\infty[$ par $F(x) = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$

Exercice n°8

1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$ f est définie et continue sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x \in]-\frac{2}{3}; +\infty[$, f étant de la forme $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = 3x+2 \Rightarrow u'(x) = 3$, elle

admet une primitive sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$ définie par $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{3x+2}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$ f est définie et continue sur $]-\infty; \frac{2}{5}[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x \in]-\infty; \frac{2}{5}[$, $f(x) = -\frac{1}{5} \times \frac{-5}{\sqrt{2-5x}}$. f étant de la forme $f(x) = -\frac{1}{5} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où

$u(x) = 2-5x \Rightarrow u'(x) = -5$, elle admet une primitive sur $]-\infty; \frac{2}{5}[$ définie par $F(x) = -\frac{1}{5} \times 2\sqrt{u(x)} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ f est définie et continue sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x \in]\frac{3}{2}; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$. f étant de la forme $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où

$u(x) = 2x-3 \Rightarrow u'(x) = 2$, elle admet une primitive sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$ définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{2x-3}$

4) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour $x \in \mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = x^2+x+1 \Rightarrow u'(x) = 2x+1$, elle admet une primitive sur \mathbb{R} définie par

$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2+x+1}$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ f est définie et continue sur chacune des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$. f étant de la

forme $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = x^2-1 \Rightarrow u'(x) = 2x$, elle admet une primitive sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$

et $]1; +\infty[$ définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2-1}$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x \in \mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = 2+\sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, elle admet une

primitive sur \mathbb{R} définie par $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{2+\sin x}$

Exercice n°9

1) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2) Puisque $g'(x) = \frac{3}{2}f(x)$, on déduit que $f(x) = \frac{2}{3}g'(x)$. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de f est donc la fonction définie

$$\text{par } \boxed{F(x) = \frac{2}{3}g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}}$$

Exercice n°10

1) a) FAUX. $f(0,5) = 0$, mais cela n'influe pas sur le signe de ses primitives

b) VRAI. Puisque f est négative sur $[0; 0,5]$ et positive sur $[0,5; +\infty[$, toute primitive de f est décroissante sur $[0; 0,5]$ et croissante sur $[0,5; +\infty[$

2) C'est la **courbe 2** qui correspond à la représentation graphique de toute primitive de f .

Exercice n°11

1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des

primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln(|x|) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln(x)}$ puisque $x \in]0; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annule pas, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$,

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x|) = \frac{x^2}{2} + x + \ln(x)}$$
 puisque $x \in]0; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des

primitives sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boxed{F(x) = 7 \ln(|x|) + 5 \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 7 \ln(x) + 10\sqrt{x} - \frac{1}{x}}$, car $x \in]0; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$. f est continue sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annule pas, donc admet des primitives sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$, et puisque $f(x) = \frac{3}{3x-4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où

$$u(x) = 3x - 4 \Rightarrow u'(x) = 3, \quad \boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|3x - 4|) = \ln(3x - 4)}$$
 car $x \in \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$

5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. f est continue sur $] -1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annule pas, donc admet des primitives sur $] -1; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x+1 \Rightarrow u'(x) = 1$,

$$\boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x+1|) = \ln(x+1)}$$
 car $x \in] -1; +\infty[$

6) Si $x \in] -\infty; -1[$, $\boxed{F(x) = \ln(|x+1|) = \ln(-(x+1)) = \ln(-x-1)}$

7) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$. f est continue sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne

s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2; +\infty[$, et puisque $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

où $u(x) = x^2 - 4 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|x^2 - 4|) = \ln(x^2 - 4)$ car $x \in]2; +\infty[$

8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $]2; +\infty[$. f est continue sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2; +\infty[$, et pour tout $x \in]2; +\infty[$, puisque

$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-5} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = 3x-5 \Rightarrow u'(x) = 3$, $F(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x-5|) = \frac{1}{3} \ln(3x-5)$ car $x \in]2; +\infty[$

9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur \mathbb{R} . f est continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 2$ est strictement négatif) donc admet des primitives sur \mathbb{R} , et pour tout

$x \in \mathbb{R}$, puisque $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x + 2$,

$F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 2x + 2|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2)$, puisque $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 2x + 2 > 0$

10) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $] -1; 1[$. f est continue sur $] -1; 1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $] -1; 1[$, et pour tout $x \in] -1; 1[$, puisque

$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = x^2 - 1 \Rightarrow u'(x) = 2x$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 - 1|) = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$

puisque $x \in] -1; 1[\Rightarrow 1 - x^2 < 0$

Exercice n°12

1) Pour tout $x \in [4; +\infty[$, $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2} = \frac{ax^2 + (b-2a)x - 2b + c}{x-2}$

Ainsi $ax + b + \frac{c}{x-2} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -3 \\ -2b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 + 4 = 1 \\ c = -4 + 2 = -2 \end{cases}$. Pour tout $x \in [4; +\infty[$, $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x-2}$

2) f est définie et continue sur $[4; +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4; +\infty[$. A partir de l'écriture $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{x-2}$, on déduit

l'expression d'une primitive F de f sur $[4; +\infty[$: $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(|x-2|) = x^2 + x - 2 \ln(x-2)$ car $x \in [4; +\infty[\Rightarrow x-2 > 0$

Exercice n°13

1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puisque $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, où

$u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$, $F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\sin x|) = \ln(\sin x)$, puisque $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin x > 0$.

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u'(x) \times u(x), \text{ ou } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}, \boxed{F(x) = \frac{(u(x))^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. f définie est continue sur $]1; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$, ou

$$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}, \boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|\ln(x)|) = \ln(\ln(x))} \text{ car } x \in]1; +\infty[\Rightarrow \ln x > 0$$

4) $f(x) = \tan x$. f définie est continue sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, et pour tout $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, puisque $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou

$$u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x, \boxed{F(x) = -\ln(|u(x)|) = -\ln(|\cos x|) = -\ln(-\cos x)}, \text{ puisque } x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right] \Rightarrow \cos x < 0.$$

Exercice n°14

1) $f(x) = \frac{1}{4}e^x$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives

sur \mathbb{R} , et pour tout $\boxed{F(x) = \frac{1}{4}e^x}$.

2) $f(x) = e^{-x}$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur \mathbb{R} , et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(-e^{-x}) = -u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = -1$, $\boxed{F(x) = e^{u(x)} = e^{-x}}$.

3) $f(x) = e^{2x+3}$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur \mathbb{R} , et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+3} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x) = 2x+3 \Rightarrow u'(x) = 2$,

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{2x+3}}.$$

4) $f(x) = xe^{x^2}$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur \mathbb{R} , et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$,

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = e^{x^2}}.$$

5) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x+1 > 0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur \mathbb{R} , et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ ou } u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x, \boxed{F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(|e^x+1|) = \ln(e^x+1)} \text{ car } x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x+1 > 0$$

Exercice n°15

La fonction F , définie sur \mathbb{R} , par $F(x) = (ax + b)e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonction qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$

F sera une primitive de f si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$

Une primitive de f sur \mathbb{R} est donc $\boxed{F(x) = (x+1)e^x}$

Exercice n°16

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{e^{-x} + 1} = \frac{3 \times e^x}{(e^{-x} + 1) \times e^x} = \frac{3e^x}{e^{-x} \times e^x + 1 \times e^x} = \frac{3e^x}{1 + e^x}$

2) . f est définie et continue sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + e^x > 0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur \mathbb{R} , et en utilisant l'écriture $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 1} = 3 \frac{u'(x)}{u(x)}$ ou

$u(x) = e^x + 1$, on obtient $\boxed{F(x) = 3 \ln(|u(x)|) + k = 3 \ln(|e^x + 1|) + k = 3 \ln(e^x + 1) + k}$ car $e^x + 1 > 0$ sur \mathbb{R}

PRIMITIVES

EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Dérivée et primitives

- 1) Calculez la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$.
- 2) Déduisez-en deux primitives de la fonction g définie par $g(x) = 9x^2 - 9$
- 3) Déterminer le sens de variation de f sur \mathbb{R}

Exercice n°2 à 11 – Primitives sans fonction logarithme

Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition

Exercice n°2. Usage des tableaux de primitives usuelles

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1) $f(x) = 2x + 1$ | 2) $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$ | 3) $f(x) = (x-1)(x+3)$ | 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$ |
| 5) $f(x) = \frac{-4}{3x^5}$ | 6) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ | 7) $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ | |

Exercice n°3. Primitive et constante

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$.

Déterminer la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.

Exercice n°4.

Trouver la primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée

- 1) $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ $I = \mathbb{R}$ $F(1)=0$
- 2) $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $I =]0; +\infty[$ $F(1)=1$

Exercices n°5 à n°8 : Déterminer une primitive des fonctions données

Exercice n°5. Forme $u'u^n$

1) $f(x) = 3(3x+1)^4$	2) $f(x) = 16(4x-1)^3$	3) $f(x) = (2x+7)^6$	4) $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
5) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$	6) $f(x) = \sin x \cos x$		

Exercice n°6. Forme $\frac{u'}{u^2}$

1) $f(x) = \frac{4}{(1+4x)^2}$	2) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$	3) $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$	4) $f(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$
5) $f(x) = \frac{2}{(4-3x)^2}$	6) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$	7) $f(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$	8) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$
9) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$			

Exercice n°7.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$.

- 1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$.
- 2) En déduire une primitive F de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice n°8. Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-5x}}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

4) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$.

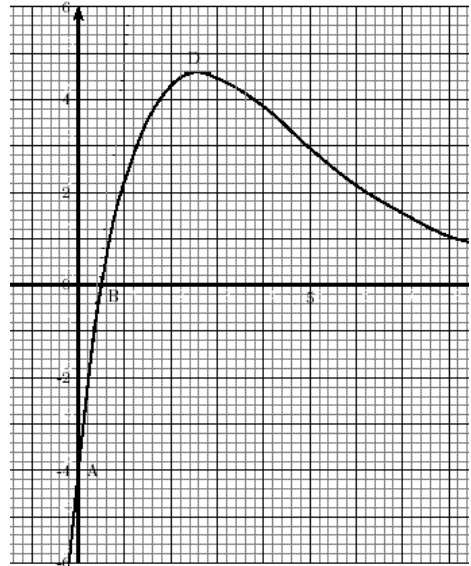
1) Calculez la dérivée de g sur $]0; +\infty[$

2) soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Déduisez de la première question une primitive de f sur $]0; +\infty[$

Exercice n°10.

La courbe (C) donnée ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .



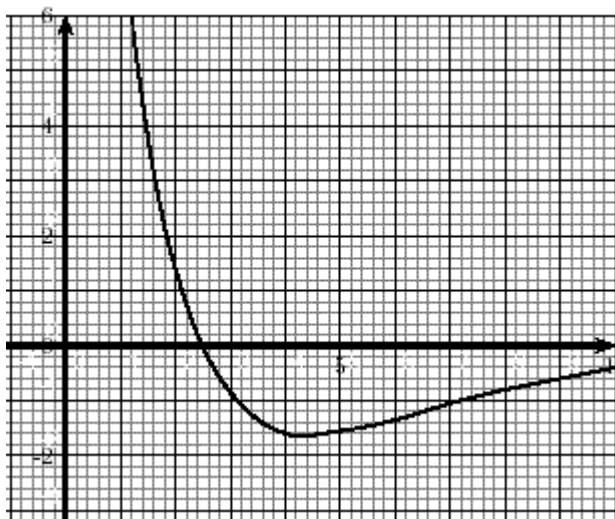
1) Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

a. Toute primitive de f s'annule pour 0,5.

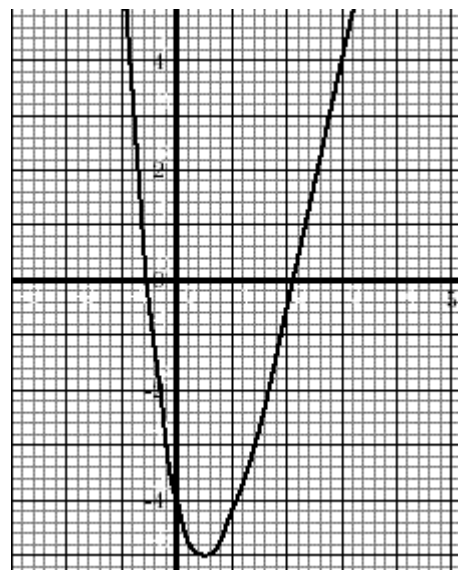
b. Toute primitive de f est décroissante sur $[0 ; 0,5]$.

2. Parmi les courbes (C_1) et (C_2) données ci-dessous, l'une est la représentation graphique d'une primitive de f sur \mathbb{R} . Indiquer laquelle en précisant les raisons de votre choix.

Courbe 1



Courbe 2



Exercice n°11 à 16 – Primitives utilisant les fonctions logarithmes et exponentielles

Exercice n°11.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

- 1) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
- 2) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
- 3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$
- 4) $f(x) = \frac{3}{3x-4}$ sur $I = \left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$
- 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$
- 6) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $I =]-\infty; -1[$
- 7) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ sur $I =]2; +\infty[$
- 8) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $I =]2; +\infty[$
- 9) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur \mathbb{R}
- 10) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]-1; 1[$

Exercice n°12.

On considère la fonction définie sur $I = [4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x-2}$

- 1) Trouver trois réels a, b , et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- 2) En déduire une primitive de f sur $[4; +\infty[$

Exercice n°13.

Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

- 1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $I = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$
- 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $I = [1; +\infty[$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $I =]1; +\infty[$
- 4) $f(x) = \tan x$ sur $I = \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

Exercice n°14.

Déterminez une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f donnée :

1) $f(x) = \frac{1}{4}e^x$	2) $f(x) = e^{-x}$	3) $f(x) = e^{2x+3}$	4) $f(x) = xe^{x^2}$	5) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
----------------------------	--------------------	----------------------	----------------------	-------------------------------

Exercice n°15.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^x$

Déterminez les nombres a et b tels que la fonction F , définie sur \mathbb{R} , par $F(x) = (ax+b)e^x$ soit une primitive de f .

Exercice n°16.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{e^{-x}+1}$

- 1) Vérifiez que pour tout x de \mathbb{R} , on a $f(x) = \frac{3e^x}{e^x+1}$
- 2) Déduisez en la primitive F de f qui s'annule pour $x=0$